MATHEMATIQUES

PREMIERE COMPOSITION
(Epreuve supplémentaire et complémentaire)
Durée : 3 heures

La partie I est indépendante de II et III. La partie III peut être abordée en utilisant les résultats de I et de II.

Soit I l'intervalle ouvert réel $]\ 0, +\infty\ [$. A tout réel λ, on associe l'application f_λ de I dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall t \in I \qquad f_\lambda(t) = t^\lambda\ e^{-t}$$

I 1°/ Etudier, suivant les valeurs de λ :

a) les limites de f_λ aux bornes de I.

b) les variations de f_λ .

2°/ Dans les quatre cas : $\lambda = -1,\ \frac{1}{4},\ 1,\ 4$, construire la représentation graphique G de f_λ et en particulier :

- étudier les branches infinies ;
- indiquer les coordonnées des extremums et des points d'inflexion s'ils existen

(Représenter les 4 courbes sur la même figure).

3°/ Soit $g(\lambda)$ la valeur maximale de f_λ quand elle existe ; étudier les variations de g ; construire la représentation graphique de g après avoir étudié ses branches infinies.

4°/ Soit $J(\lambda) = \int_0^{+\infty} f_\lambda\ (t)\ dt$;

a) quel est le domaine de définition de J ?

b) trouver une relation simple entre $J(\lambda)$ et $J(\lambda+1)$;

c) calculer $J(n)$ pour n entier naturel.

5°/ Soit Γ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f_1\ (t) \\ y = f_4\ (t) \end{cases}$$

dans un repère orthonormé du plan affine euclidien.

a) construire Γ

b) trouver l'aire du domaine intérieur à Γ

II Dans toute cette partie, λ est fixé. Les fonctions P_n qui interviendront, on n l'oubliera pas, dépendront donc de λ.

. . . / . . .

Les dérivées première, seconde, $n^{ième}$ d'une fonction h se notent comme d'habitude h', h", $h^{(n)}$ respectivement.

Le but de cette partie est l'étude des fonctions

$$f_{\lambda+n}^{(n)}$$

1°/ Montrer que l'on a :

$$f'_{\lambda+1}(t) = P_1(t) f_\lambda(t)$$

où $P_1(t)$ est un polynôme de degré 1 que l'on explicitera.

2°/ En utilisant une relation simple entre $f_{\lambda+n+1}$ et $f_{\lambda+n}$, établir que, pour tout entier n, il existe un polynôme P_n tel que l'on ait :

$$f_{\lambda+n}^{(n)} = P_n(t)\ f_\lambda(t)$$

le polynôme P_n vérifiant la relation de récurrence

$$(1) \quad P_{n+1}(t) = t\ P'_n(t) + (\lambda + n + 1 - t)\ P_n(t)$$

Quel est le terme de plus haut degré de P_n ?

3°/ En utilisant une relation simple entre $f'_{\lambda+n+1}$ et $f_{\lambda+n}$ montrer que l'on a pour tout entier n :

$$(2) \quad P'_{n+1}(t) = (n + 1)\ (P'_n(t) - P_n(t))$$

4°/ Etablir enfin la relation :

$$(3) \quad (f_{\lambda+1}\ P'_n)' = -\ n\ P_n f_\lambda$$

III Soit Δ l'ensemble des λ tels que pour toute fonction polynôme Q, l'intégrale $\int_0^{+\infty} Q(t)\ f_\lambda(t)dt$ ait un sens. Pour λ appartenant à Δ, on note L(Q) la valeur de cette intégrale.

1°/ Déterminer Δ.

On suppose désormais que λ est dans Δ .

2°/ Soit Q_1 et Q_2 deux fonctions polynômes. Etablir la relation :

$$\int_0^{+\infty} (f_{\lambda+1}\ Q'_1)'(t)\ Q_2(t)dt = \int_0^{+\infty} (f_{\lambda+1}\ Q'_2)'(t)\ Q_1(t)dt$$

3°/ Montrer que $n \neq m$ entraîne $L(P_n P_m) = 0$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail